INDIRE
ISTITUTO NAZIONALE DOCUMENTAZIONE INNOVAZIONE RICERCA EDUCATIVA

Tiziana Pacelli
Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli",
Università degli studi di Napoli Federico II

Le rappresentazioni semiotiche: il loro ruolo nei processi di insegnamento e apprendimento della matematica

Ministero dell'Istruzione
UNIONE EUROPEA
Fondo sociale europeo
Fondo europeo di sviluppo regionale

Codice Progetto: 10.2.7.A4-FSEPON-INDIRE-2021-1
CUP: B55F21003060006

1. Introduzione: il problema della carenza delle competenze linguistiche

Il problema della carenza delle competenze linguistiche degli studenti italiani — e non solo — è negli ultimi anni al centro di discussioni e dibattiti, che coinvolgono anche esperti del settore. Ad esempio, nel 2017 è stata sottoscritta la "Lettera dei 600"[1], che ha avuto una certa risonanza anche su diversi media.

In questo appello varie figure accademiche hanno espresso forte preoccupazione in relazione alle difficoltà linguistiche degli studenti, sottolineate anche da altri dati: ad esempio, i dati Istat del 2016 evidenziano che, in Italia, il 59,5% non legge libri, ben il 70% si trova al di sotto del livello 3 delle competenze alfa-numeriche, individuato nelle prove Ocse-Pisa come livello essenziale per vivere e lavorare dignitosamente, ed, infine, il 42% degli italiani risulta essere analfabeta-funzionale, nel senso che è in grado di decifrare un testo, ma non è in grado di padroneggiarne il significato (Sinopoli, 2017). I 600 accademici che hanno firmato il documento, però, collocano le carenze linguistiche nella grammatica, nella sintassi e nel lessico e propongono, quindi, delle azioni coerenti con questa interpretazione.

Le difficoltà linguistiche esistono, ma bisogna tener conto che sono generate anche da molti altri fattori, oltre a quelli messi in luce nella Lettera dei 600.

2. Le difficoltà linguistiche in matematica

Per quanto riguarda la matematica, è molto diffusa l'idea secondo cui le difficoltà linguistiche sono legate solo a eccessi di formalismo nei testi matematici e a carenze lessicali degli studenti, ma numerosi studi hanno messo in evidenza che, oltre al lessico, possono esserci molteplici altre cause, come ad esempio il simbolismo, l'interpretazione dei testi verbali e l'interpretazione di sistemi di rappresentazioni semiotiche (Ferrari, 2021).

Per quanto riguarda la ricerca, molti sono gli studiosi, nell'ambito dell'educazione matematica, i cui interessi si focalizzano sul rapporto tra linguaggio e matematica. Ad esempio, nella Teoria delle Commognition, Sfard (2009) parla di *matematica come discorso*, sottolineando il ruolo fondamentale della comunicazione nei processi di insegnamento/apprendimento della matematica, essendo il linguaggio da lei visto non come trasmettitore di significati già costruiti, ma costruttore dei significati stessi. Morgan (1998) e Ferrari (ad esempio, 2004a; 2004b; 2018; 2021) usano alcuni costrutti, che mettono al centro le funzioni del linguaggio rispetto alle forme, per spiegare il funzionamento del linguaggio matematico in relazione al contesto, tenendo conto della sua specificità. Zan e Di Martino (2017), occupandosi di difficoltà degli studenti nei processi risolutivi dei problemi, evidenziano il ruolo fondamentale del linguaggio usato nel testo del problema. Branchetti e Viale (2014), e Bolondi e Viale (2016) hanno cercato di analizzare le difficoltà degli studenti nell'interpretare i testi delle prove Invalsi. Duval nei suoi studi (ad esempio, 1993; 1995) analizza e discute il ruolo delle rappresentazioni semiotiche nelle attività matematiche.

3. Linguaggio e matematica nei documenti ufficiali

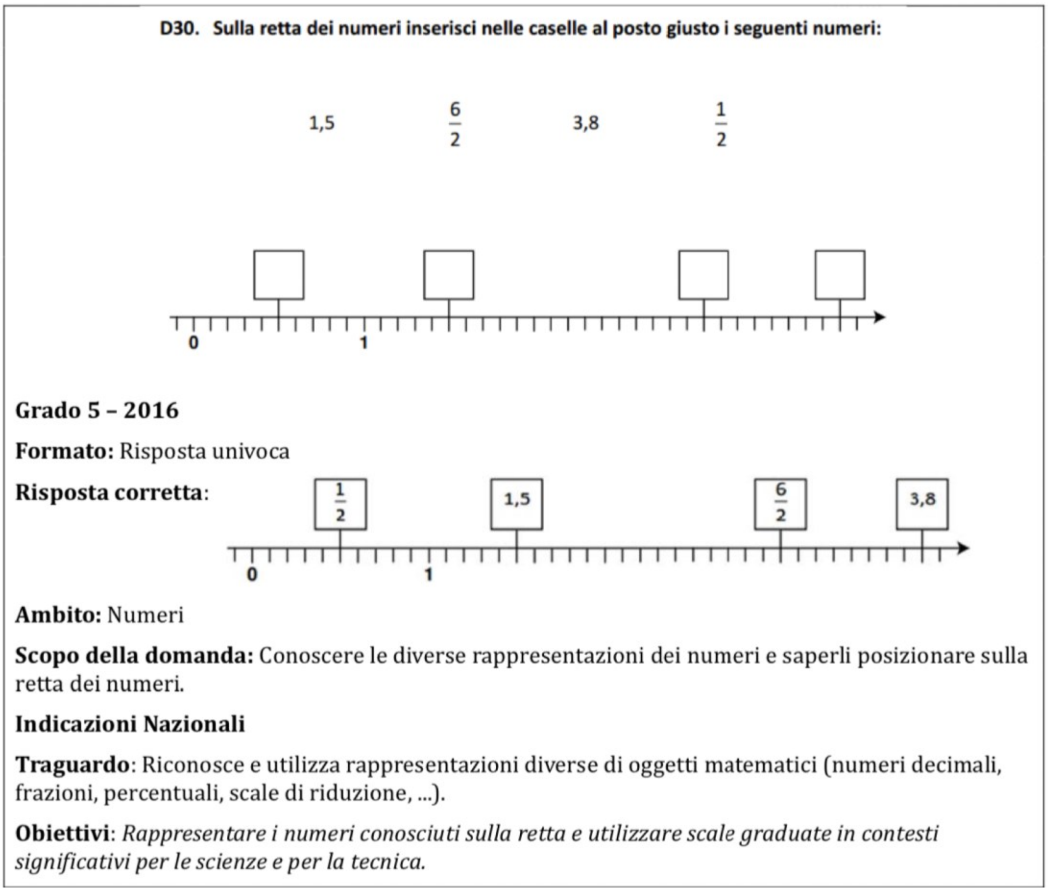
[1] Ad esempio si veda: https://www.tpi.it/news/lettera-600-docenti-chiedono-governo-intervenire-ignoranza-studenti-2017020528774/ .

L'importante ruolo del linguaggio nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica viene evidenziato anche in molti documenti ufficiali e istituzionali.
Ad esempio, nelle *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'Infanzia e del primo ciclo* (Miur, 2012) ci sono riferimenti a tale tematica già nella parte introduttiva (pag. 60), in cui si sottolinea come la matematica contribuisca a "*sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri".* Si mette in luce come la costruzione del pensiero matematico sia un *"processo che comporta anche difficoltà linguistiche e che richiede un'acquisizione graduale del linguaggio matematico".* Infine, si pone l'accento sull'importanza di dedicare attenzione *"allo sviluppo della capacità di esporre e di discutere con i compagni le soluzioni e i procedimenti seguiti*".
In particolare, in tale documento, nella sezione dei *"Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria"* si evidenzia come lo studente debba essere in grado di rappresentare forme del piano e dello spazio, di costruire rappresentazioni di dati, di leggere e comprendere testi, di riconoscere e utilizzare rappresentazioni diverse di oggetti matematici.
Anche nei "*Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di primo grado*" diversi sono i riferimenti. In questa sezione, ad esempio ci si riferisce al saper padroneggiare diverse rappresentazioni, interpretare dati, spiegare il procedimento, produrre argomentazioni, utilizzare e interpretare il linguaggio matematico nelle sue diverse forme.
Nelle Indicazioni Nazionali riguardanti la scuola secondaria di II grado esistono cenni simili, relativi al linguaggio, in più punti. Ad esempio, nel caso del Liceo Scientifico (Miur, 2010), in corrispondenza del nucleo tematico Relazioni e Funzioni, uno degli obiettivi da raggiungere è *"passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro"*; nel nucleo Dati e Previsioni, inoltre, ci si pone, come obiettivo il saper "*rappresentare e analizzare in diversi modi […] un insieme di dati, scegliendo le rappresentazioni più idonee".*
Come Ferrari (2021) sottolinea, ciò che emerge, dando uno sguardo a questi documenti, è che vengono riconosciuti diversi e fondamentali aspetti legati al linguaggio:

- la centralità della spiegazione, della discussione e dell'argomentazione;
- il ruolo fondamentale svolto dalla negoziazione nel processo di costruzione dei significati durante l'apprendimento;
- oltre alla funzione comunicativa, il linguaggio è visto come uno strumento per riflettere operare e discutere;
- la consapevolezza che alcune difficoltà di apprendimento della matematica sono proprio di natura linguistica.

In linea con quanto detto, riprendendo ciò che viene suggerito nei documenti istituzionali che riguardano la scuola, anche le Prove somministrate dall'INVALSI (*Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema Educativo di Istruzione e formazione*)[2], nell'ambito della rilevazione nazionale sugli apprendimenti in matematica, vengono strutturate ponendosi dei traguardi che riguardano diversi aspetti del linguaggio. Ad esempio, in un item di una prova somministrata nel 2016 agli studenti delle classi quinte della scuola primaria (Figura 1) si chiede di rappresentare i numeri razionali, espressi sia in forma decimale che in forma di frazione, su una retta di numeri reali.

[2] https://invalsi-areaprove.cineca.it/index.php?get=static&pag=home_rn



D30. Sulla retta dei numeri inserisci nelle caselle al posto giusto i seguenti numeri:

1,5 $\frac{6}{2}$ 3,8 $\frac{1}{2}$

Grado 5 – 2016

Formato: Risposta univoca

Risposta corretta:

Ambito: Numeri

Scopo della domanda: Conoscere le diverse rappresentazioni dei numeri e saperli posizionare sulla retta dei numeri.

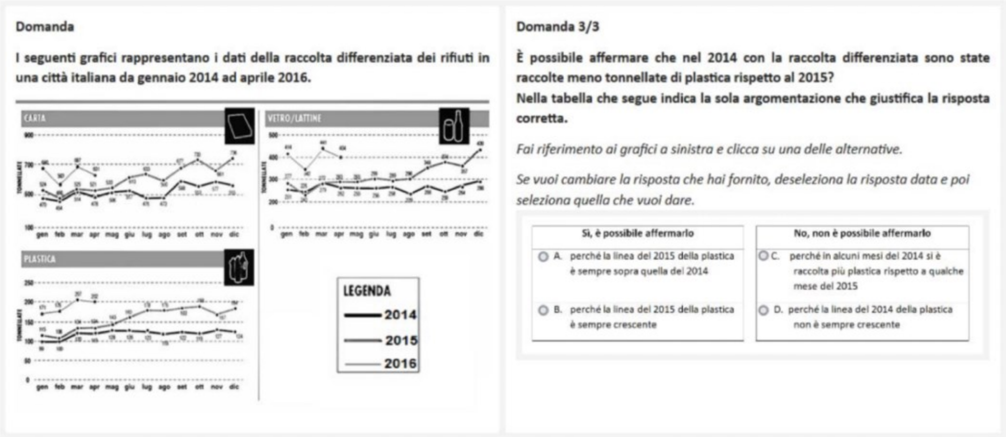
Indicazioni Nazionali

Traguardo: Riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici (numeri decimali, frazioni, percentuali, scale di riduzione, ...).

Obiettivi: *Rappresentare i numeri conosciuti sulla retta e utilizzare scale graduate in contesti significativi per le scienze e per la tecnica.*

Figura 1 - Esempio di prova INVALSI - Grado 5 (2016). Fonte: https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_MATEMATICA.pdf

In un altro item di una prova somministrata nel 2018 agli studenti delle classi terze di scuola secondaria di I grado (Figura 2), invece, oltre alla richiesta di dover interpretare alcuni grafici di una distribuzione di dati, si chiede anche di produrre delle argomentazioni.



Grado 8 – 2018 (CBT)

Formato: Scelta multipla

Risposta corretta: A

Ambito: Dati e previsioni

Scopo della domanda: Utilizzare la visione globale di un grafico per scegliere un'affermazione relativa all'andamento di serie storiche.

Indicazioni Nazionali

Traguardo: Produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite (ad esempio sa utilizzare i concetti di proprietà caratterizzante e di definizione).

Figura 2- Esempio di prova INVALSI - Grado 8 (2018). Fonte: https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_MATEMATICA.pdf

4. Linguaggio della matematica come sistema multimodale

Una delle caratteristiche del linguaggio della matematica è di essere un *sistema multimodale*, nel senso che, sia nel fare che nel comunicare matematica, vengono coinvolti più sistemi semiotici (Ferrari, 2018; 2021; Morgan, 1998).
Per *sistema semiotico* si intende un qualsiasi sistema di segni caratterizzato da *"[...] associazioni complesse, che sono prodotte secondo regole e che permettono la descrizione di un sistema, un processo, un insieme di fenomeni"* (Duval, 2006, p. 104).
Infine, per comprendere cosa sia un *segno* si può considerare la definizione data da Umberto Eco nel famoso *Trattato di semiotica generale* (1975, p. 20), dove si afferma

> *"[il segno è] …ogni cosa che possa essere assunta come un sostituto significante di qualcosa d'altro. Questo qualcosa d'altro non deve necessariamente esistere, né deve sussistere di fatto nel momento in cui il segno sta in luogo di esso."*
>
> (Eco, 1975, p. 20)

In tal senso, dunque, le *rappresentazioni semiotiche* possono denotare e descrivere oggetti materiali, proprietà fisiche, azioni e relazioni, o oggetti molto più astratti, così come avviene in matematica (Goldin, 1998).
Nel contesto matematico, infatti, i vari concetti possono essere presentati o espressi attraverso diversi *sistemi semiotici*, che molti studiosi tendono a raggruppare in tre categorie principali:

- il **linguaggio verbale,** che include le lingue scritte o orali; ad esempio, questo accade per l'espressione *"L'intersezione degli insiemi A e B"*, in cui si usa la lingua italiana;

- le **notazioni simboliche,** che includono l'uso di simboli e formule. Ad esempio, nell'espressione "$A \cap B$" vengono usati 3 simboli "A" , "B" e "$\cap$" collegati secondo delle regole;
- le **rappresentazioni figurali,** che includono immagini, diagrammi, sistemi di coordinate e altre rappresentazioni figurative. Ad esempio, nella Figura 3 vengono usati i diagrammi di Eulero-Venn.

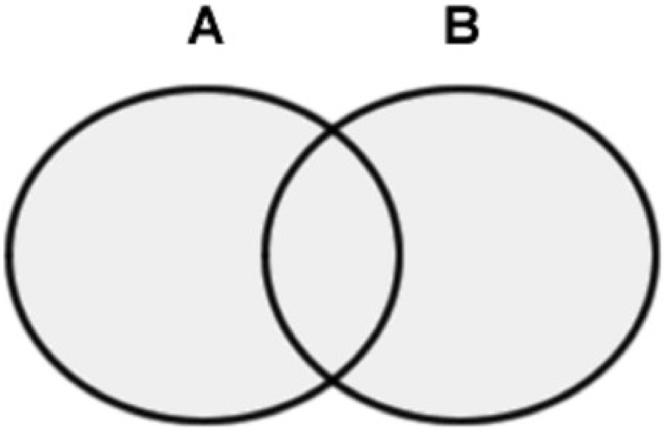


Figura 3 - Esempio di rappresentazione figurale: intersezione di A e B tramite diagrammi di Eulero-Venn

Si può facilmente osservare che, spesso, una sola rappresentazione può non essere sufficiente per presentare un'idea matematica. In molti casi, ci si trova di fronte contemporaneamente più rappresentazioni semiotiche, come nell'esempio della Figura 4 (Ferrari, 2018; 2021), dove per introdurre la funzione valore assoluto si usano contemporaneamente il linguaggio verbale, le notazioni simboliche e le rappresentazioni figurali. Tutte le rappresentazioni usate sono strettamente interconnesse tra loro ed interpretabili singolarmente solo prendendo in considerazione anche le altre rappresentazioni in gioco. Ad esempio, nel testo si trova l'espressione verbale *"tangente nell'origine"* che è interpretabile solo facendo riferimento alla rappresentazione figurale. Gli studenti, dunque, nell'approcciarsi alla nuova nozione matematica di funzione valore assoluto, si ritrovano a dover gestire—spesso con difficoltà—più rappresentazioni semiotiche contemporaneamente.

La funzione modulo (o valore assoluto) è definita da:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

La figura che segue mostra il grafico della funzione. È evidente che la tangente nell'origine non è ben definita.

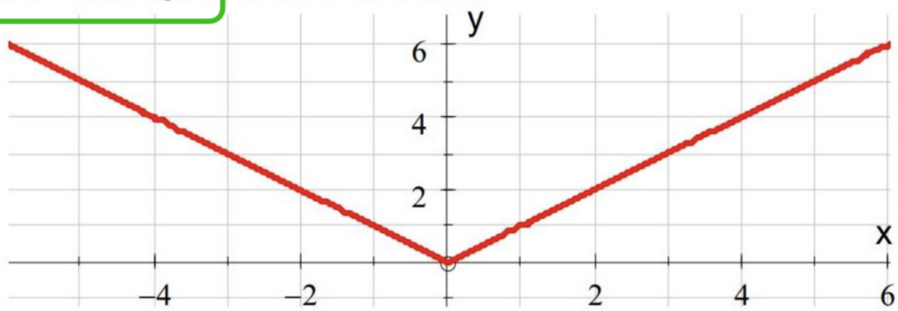


Figura 4 - Esempio di uso contemporaneo di diversi tipi di rappresentazioni semiotiche. Fonte: Ferrari (2018; 2021)

5. L’importanza delle rappresentazioni semiotiche in matematica

Nel campo della ricerca in educazione matematica, l’attenzione verso le rappresentazioni semiotiche da parte di vari studiosi, come ad esempio Raymond Duval (1993; 1995; 2006), è cominciata cercando di rispondere ad una domanda di questo tipo: *Che cosa è così caratteristico dell’attività matematica, in confronto alle altre attività cognitive, da suscitare forti difficoltà di apprendimento negli studenti?*

Nel tentativo di capire le difficoltà che gli studenti incontrano quando si approcciano a tale disciplina, spesso ci si concentra sui concetti e sulla loro difficoltà epistemologica, che può essere spiegata con la storia della loro scoperta. Ma tutti i domini di conoscenza hanno concetti più o meno complessi e, quindi, questo non differenzia la matematica da altre discipline come l’astronomia, la biologia, la chimica, etc. Una caratteristica, invece, strettamente tipica della matematica, è che gli oggetti matematici, a partire ad esempio già dal “numero”, non sono oggetti che possono essere direttamente percepiti o osservati tramite degli strumenti. L’accesso ad essi è limitato dall’uso di un sistema di rappresentazione che ne permette lo studio.

D’altra parte, se si osserva il progredire della matematica nel suo percorso storico, si può notare come lo sviluppo delle rappresentazioni semiotiche è sempre stata una condizione essenziale per l’evoluzione del pensiero matematico stesso. Come Duval (1993) afferma, in una attività matematica l’uso di più sistemi di rappresentazione semiotica non solo è tipica proprio del pensiero matematico, ma la creazione e lo sviluppo di sistemi semiotici nuovi è storicamente importante, perché rappresenta il progresso della conoscenza.

Ad esempio, se consideriamo la storia dei sistemi di numerazione, si passò dal sistema romano al sistema decimale posizionale, in quanto il secondo sistema di rappresentazione forniva maggiori possibilità di “manipolazione” dei simboli e, quindi, di calcolo. In tal modo, mentre una semplice operazione — come l’addizione — poteva risultare complicata manipolando i simboli del sistema romano, con i nuovi simboli tipici della rappresentazione indo-arabica, risultava una manipolazione più

semplice. In generale, la possibilità di una manipolazione dipende proprio dal sistema di rappresentazione che si sceglie di usare.
È interessante riflettere sull'affermazione di Duval (1995): *non c'è Noesis senza Semiosis*; non ci sono, cioè, processi di conoscenza senza processi di rappresentazione, che sottolinea proprio queste caratteristiche tipiche della matematica:

- gli oggetti studiati sono inaccessibili al di fuori di rappresentazioni, dipendenti unicamente da una attività semiotica;
- l'apprendimento non avviene, dunque, attraverso un'esperienza diretta con gli oggetti studiati, ma attraverso lo sviluppo di consapevolezza che diverse rappresentazioni sono rappresentazioni di uno stesso oggetto matematico.

Un esempio di quest'ultimo punto è stato descritto in precedenza, quando sono state introdotte tre diverse rappresentazioni semiotiche (verbale, simbolica e figurale) di uno stesso oggetto matematico "intersezione tra due insiemi".

6. Il problema cognitivo della distinzione tra rappresentazione e oggetto

È fondamentale sottolineare che, poiché gli studenti in fase di apprendimento entrano in relazione solamente con le rappresentazioni semiotiche degli oggetti matematici in gioco, il rischio è che potrebbero confondere tali oggetti matematici proprio con le rappresentazioni usate, non riuscire a distinguere le due cose. Lo stesso Duval (1993) parlava di *Paradosso Cognitivo:*

> *"Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi inevitabile. E, al contrario, come possono essi acquisire la padronanza dei trattamenti matematici, necessariamente legati alle rappresentazioni semiotiche, se non hanno già un apprendimento concettuale degli oggetti rappresentati?"*
>
> (Duval, 1993, p. 38)

Questa situazione può essere anche una conseguenza della modalità con cui vengono presentati gli oggetti matematici durante le attività matematiche. Un caso banale può essere l'abitudine dei docenti di introdurre oggetti matematici usando sempre e solo un'unica rappresentazione. Ad esempio, se, durante i primi livelli scolastici, una docente dice ai suoi alunni che quello a sinistra nella Figura 5 è un cubo e mostra loro sempre e solo questa rappresentazione rossa, allora gli studenti avranno difficoltà a riconoscere che anche quello a destra nella Figura 5 è un cubo.

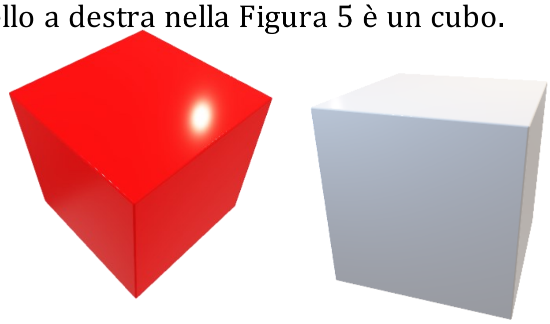


Figura 5 - Due diverse rappresentazioni di "cubo"

Ci si potrebbe, quindi, facilmente trovare in situazioni come le seguenti (D'Amore, Fandino Pinilla, Iori, Matteuzzi, 2013).
Se, ad esempio, si chiede a un bambino, della scuola dell'infanzia o dei primi anni della scuola primaria, che cos'è "il numero tre" (Figura 6), egli, generalmente, potrebbe mostrare tre dita alzate della mano destra; la domanda riguarda l'oggetto matematico "tre", ma ha come risposta una rappresentazione semiotica di quell'oggetto. Se si pone a un bambino di fine scuola primaria la stessa domanda, allora come risposta si potrebbe avere il simbolo "3" scritto su un pezzo di carta; in questo caso è cambiata la rappresentazione semiotica, ma sembra essere rimasto il problema della non distinzione tra oggetto e sua rappresentazione.
Se, si considera un altro oggetto matematico e un altro livello scolastico, si può osservare lo stesso fenomeno. Se si chiede a un quindicenne che cosa sia una retta, è facile che qualche ragazzo disegni un qualcosa sulla carta come quello che vediamo nella seconda colonna della Figura 6; qualche altro studente potrebbe scrivere, invece, un'equazione lineare del tipo $ax+by+c=0$. Entrambe le risposte sono solo rappresentazioni semiotiche dell'oggetto richiesto, non l'oggetto richiesto.
Situazioni simili si possono verificare a ogni livello scolastico ed anche a livello universitario.

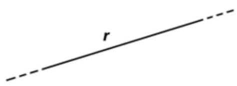
DOMANDA	**POSSIBILI RISPOSTE**	
Che cos'è "il numero tre"?		**3**
Che cos'è "una retta"?		$ax + by + c = 0$

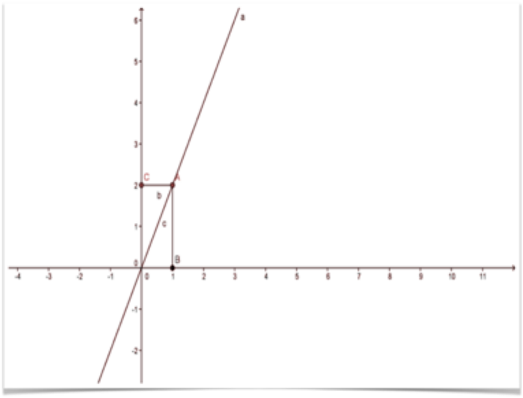
Figura 6 - Problema della non distinzione tra oggetto e sua rappresentazione

6.1 Un esempio: la funzione

Una situazione che potrebbe riguardare la scuola secondaria di secondo grado coinvolge l'oggetto matematico "funzione". È facile imbattersi in studenti, di questo livello scolastico, che identificano tale oggetto matematico con la sua rappresentazione grafica in un sistema di riferimento cartesiano — che ricordiamo essere solo una delle tante rappresentazioni.
Ad esempio, consideriamo la funzione che lega le due variabili x e y mediante la legge che y è il doppio di x. Tale funzione particolare può essere rappresentata verbalmente, con scrittura simbolica, numerica in una tabella e grafica (Figura 7). Ma, spesso, accade che gli studenti non riconoscano tutte queste rappresentazioni come rappresentazioni di un unico oggetto matematico e, in più, che identifichino tale oggetto solo esclusivamente con il suo grafico, non tenendo presente che, in alcuni casi, non è possibile disegnare il grafico della funzione considerata.

$$y = 2x, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},$$

x	y
...	...
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4
....	...



La relazione tra x ed y tale che y sia il doppio di x

Figura 7 - Diverse rappresentazioni dell'oggetto matematico "funzione"

A tal proposito, si prenda in considerazione la *funzione di Dirichlet*, che assume valore 1, in corrispondenza di ogni x reale irrazionale, e 0, in corrispondenza di ogni x reale razionale. Tale funzione risulta discontinua per ogni x reale. Si può, però, osservare che il grafico della funzione di Dirichlet, a causa delle sue "frequentissime" discontinuità, non può essere disegnato, se non per un numero finito di punti e lo si può solo immaginare come un insieme "fittissimo" di punti, posizionati sia sull'asse delle x, sia sulla retta di equazione $y = 1$.

In un suo articolo Bagni (1997) descrive i risultati di un test somministrato a 3 classi di III Liceo Scientifico (75 studenti), in cui si chiedeva di disegnare il grafico, se possibile, di alcune relazioni e di dire se si trattava di funzioni o no, giustificando la risposta. Le relazioni considerate sono:

- *R1*, descritta precedentemente, che ad ogni x associa il suo doppio;
- *R2* che ad ogni x associa il numero reale 1;
- *R3* che corrisponde proprio alla funzione di Dirichlet.

Dallo studio emerge che qualche studente ha trovato difficoltà a identificare la relazione *R2* come *funzione costante*: il grafico è tracciato correttamente dall'81% degli allievi; solo il 72% ha identificato la corrispondenza come una funzione. L'incertezza aumenta nel caso della *funzione di Dirichlet* della quale, come si è appena detto, non è possibile tracciare il grafico cartesiano: il 41% ha risposto che non si tratta di una funzione.

Solo 31 studenti hanno fornito una motivazione della loro risposta e ben 19 motivazioni su 31 sono legate proprio al fatto che non è possibile disegnare il grafico della funzione di Dirichlet. Ad esempio, Chiara afferma: *"Non ho capito l'esercizio"*; ancor più emblematica è la motivazione fornita, ad esempio, da Carlo: *"Non avevo mai incontrato una funzione del genere, non sapevo neanche se fosse possibile farla"*, a testimonianza del fatto che l'oggetto matematico "funzione" sembra per gli studenti essere collegato al grafico cartesiano della relazione. Questa stretta connessione funzione/grafico sembra determinare la caratteristica discriminante principale che consente di accettare o no una relazione come una funzione. In altre parole, per gli studenti una relazione è una funzione quando ammette come grafico cartesiano una curva con determinate caratteristiche. Se non si può disegnare, dunque, non è una funzione.

7. Le caratteristiche dell'apprendimento in matematica

Per evitare il rischio che gli studenti si trovino nella situazione, appena descritta nel paragrafo 6, di non distinzione tra rappresentazione semiotica e oggetto, è fondamentale progettare e implementare attività didattiche significative che tengano conto del ruolo fondamentale delle rappresentazioni semiotiche nel processo di insegnamento/apprendimento della matematica.
Innanzitutto, bisogna tener presente che gli studenti accedono agli oggetti matematici se sono in grado di usare più sistemi di rappresentazioni semiotiche (Duval, 2006).

> *"La caratteristica dell'attività matematica è la mobilitazione di almeno due sistemi di rappresentazione, o la possibilità di cambiare in qualsiasi momento dall'uno all'altro sistema.*
> (Duval, 2006)

Più nello specifico, gli studenti devono essere in grado:

- di **rappresentare** l'oggetto matematico in un dato sistema semiotico;
- di **trattare** le rappresentazioni all'interno di uno stesso sistema semiotico;
- di **convertire** le rappresentazioni da un sistema semiotico ad un altro.

7.1 Rappresentare un oggetto matematico

In una rappresentazione semiotica bisogna distinguere tra *contenuto* e *oggetto* (Duval, 2006). Il *contenuto* di una rappresentazione dipende dal sistema semiotico usato più che dall'oggetto rappresentato. Due rappresentazioni sono diverse quando i loro contenuti sono di natura diversa, cioè non presentano lo stesso tipo di unità (parole, contorni tracciati, densità dei punti, frecce, …), anche se rappresentano lo stesso oggetto. In tal caso, si sta, cioè, usando un sistema con segni differenti per rappresentare uno stesso oggetto matematico. Ad esempio, per rappresentare l'oggetto matematico "numero razionale" (Figura 8) è possibile usare rappresentazioni semiotiche diverse con un contenuto diverso, che sono costituite da segni diversi e hanno anche caratteristiche diverse [3].
Se si fornisce agli studenti la possibilità di accedere a più rappresentazioni dello stesso oggetto li si sta aiutando a sviluppare la capacità — fondamentale in matematica — di non identificare l'oggetto con una certa rappresentazione e, ancor di più, di distinguere un oggetto dalle sue rappresentazioni.

[3] Ogni sistema semiotico ha delle proprie capacità semiotiche che determinano i tratti distintivi del contenuto di quella particolare rappresentazione.

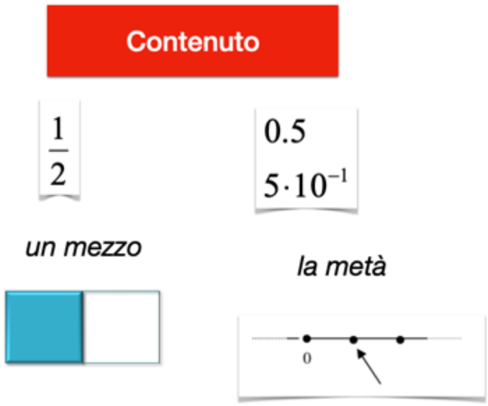


Figura 8 - Differenza tra contenuto ed oggetto

7.2 Trattare le rappresentazioni semiotiche

Il *trattamento* consiste in una serie di trasformazioni sulle rappresentazioni all'interno di uno stesso sistema semiotico (Duval, 2006). Ad esempio, si effettua un trattamento quando si svolgono calcoli, rimanendo nello stesso sistema di notazione numerica, quando si risolve un'equazione o un sistema di equazioni oppure quando si operano riconfigurazioni sulle figure geometriche (Figura 9).

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{10}-\frac{1}{5}-\frac{1}{20}=\frac{15-2-4-1}{20}=\frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{20}_{5}}=\frac{2}{5}$$

$$10(x+1)=4(x+7)+6;$$
$$10x+10=4x+28+6;$$
$$10x+10=4x+34;$$
$$10x-4x=34-10;$$
$$6x=24;$$
$$x=\frac{24}{6}=4;$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=1 \\ x-2y+3z=-5 \end{cases}$$

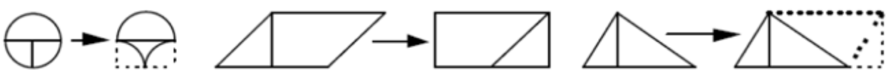


Figura 9 - Esempi di trattamento

7.3 Convertire le rappresentazioni semiotiche

La *conversione* consiste in un passaggio da una rappresentazione in un sistema semiotico a una in un altro sistema semiotico, senza cambiare l'oggetto matematico denotato (Duval, 2006). Il passaggio da un'equazione nella forma *y=f(x)* al grafico della funzione associata, come si è visto in precedenza nel paragrafo 6.1, è un classico esempio di conversione. Altri esempi possono essere il passaggio da una tabella di dati numerici a un istogramma, il passaggio da una rappresentazione di un numero razionale come frazione di interi a una rappresentazione figurale oppure il passaggio dall'enunciato di una relazione in linguaggio quotidiano alla sua scrittura simbolica (Figura 10).

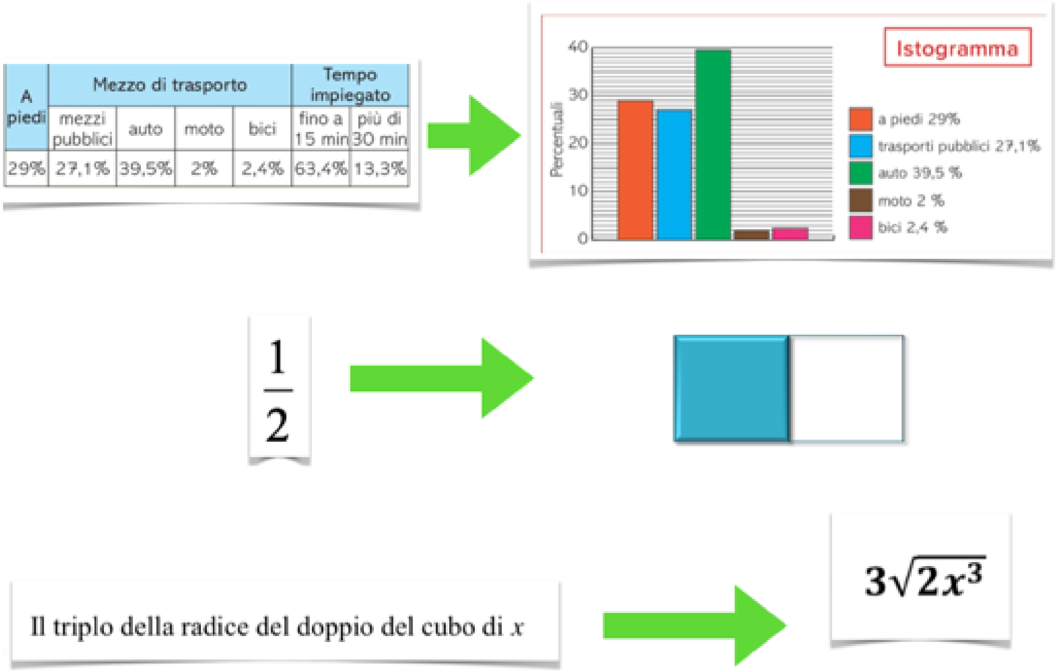


Figura 10 - Esempi di conversione

8. Conclusioni

Da un punto di vista matematico sembra essere più importante la funzione cognitiva di trattamento rispetto a quella di conversione. Infatti, i matematici, nel corso della storia hanno sviluppato dei sistemi semiotici specifici che hanno permesso forme diverse di calcolo (aritmetico, algebrico, analitico, logico, …), a volte migliori e a volte semplicemente più adatte a un certo scopo (nel paragrafo 5 si è visto come esempio il passaggio dal sistema romano al sistema decimale posizionale).
L'attività di conversione fra un sistema semiotico e l'altro, però, è di fondamentale importanza. L'obiettivo da far raggiungere agli studenti dovrebbe essere quello di *saper coordinare* i sistemi semiotici, cioè di essere in grado di usare in modo flessibile le rappresentazioni più adatte per ciascun problema, e di tenerle presenti contemporaneamente. La conversione, infatti, dal punto di vista cognitivo porta alla comprensione dell'oggetto matematico in gioco; dal punto di vista matematico permette agli studenti di scegliere il sistema semiotico in cui il trattamento risulta più efficiente. È fondamentale riflettere insieme — docenti e studenti — su tali tematiche per cercare di comprendere insieme quali possano essere i fattori che determinano le difficoltà linguistiche e, di conseguenza, alcune difficoltà in matematica. In questo modo, sarà più facile modificare alcune routine della propria prassi didattica e implementare attività matematiche significative, che aiutino gli studenti non solo ad appropriarsi più facilmente di alcuni oggetti matematici, ma anche a diventare individui in grado di vivere e lavorare in un contesto socio-culturale, in cui è necessario produrre e interpretare diversi linguaggi, in tutte le svariate forme in cui si presentano.

Riferimenti bibliografici

Bagni, G.T. (1997). La visualizzazione nella scuola secondaria superiore. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 20B,* 4, 309-335.

Bolondi, G., Viale, M. (2016). Abilità linguistiche e discipline scientifiche. In F. De Renzo, M.E. Piemontese, (a cura di), *Educazione linguistica e apprendimento/insegnamento delle discipline matematico-scientifiche* (pp. 173–185). Roma: Aracne.

Branchetti, L., Viale, M. (2014). Tra italiano e matematica: il ruolo della formulazione sintattica nella comprensione del testo matematico. *Atti del Convegno internazionale "La didattica dell'italiano. Problemi e prospettive".* Locarno 24-26 ottobre 2014, G.R.I.M.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I., Iori, M., Matteuzzi, M. (2013). Alcune riflessioni storico-critiche sul cosiddetto "Paradosso di Duval". *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 3B*, 3.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée'. In Id. (Ed.), *Annales de Didactique et de Sciences Cognitive, 5*, (pp. 37–65), Strasbourg: IREM.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103–13, doi: 10.1007/sl064

Eco, U. (1975). *Trattato di semiotica generale*. Milano: Bompiani.

Ferrari, P.L. (2004a). Mathematical language and advanced mathematics learning. In M. Hoines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol.2* (pp. 383–390). Bergen, Norway: Bergen University College.

Ferrari, P.L. (2004b). *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*. Bologna: Pitagora.

Ferrari, P.L. (2018). Il controllo semantico sui testi matematici all'inizio dell'università. *DdM Didattica della matematica. Dalle ricerche alle pratiche d'aula, 3*, 35–49.

Ferrari, P.L. (2021). *Educazione matematica, lingua, linguaggi. Costruire, condividere e comunicare matematica in classe*. UTET-Università.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 17,* 137–165.

Miur (2010). Schema di regolamento recante "Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali di cui all'articolo 10, comma 3, del decreto del Presidente della Repubblica 15 marzo 2010, n. 89, in relazione all'articolo 2, commi 1 e 3, del medesimo regolamento." https://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf

Miur (2012). Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione. *Annali della pubblica istruzione.* Numero speciale. http://www.indicazioninazionali.it/wp-content/uploads/2018/08/Indicazioni_Annali_Definitivo.pdf

Morgan, C. (1998). *Writing mathematically. The discourse of investigation.* London: Falmer Press.

Sfard, A. (2009*). Psicologia del pensiero matematico. Il ruolo della comunicazione nello sviluppo cognitivo*. Erickson.

Sinopoli, F. (2017). I nodi che la lettera dei 600 docenti sulle competenze linguistiche degli studenti di oggi non affronta. *Huffpost*. https://www.huffingtonpost.it/francesco-sinopoli/i-nodi-che-la-lettera-sulle-competenze-linguistiche-degli-studenti-non-affronta_b_14721056.html

Zan, R., Di Martino, P. (2017). *Insegnare e apprendere matematica con le Indicazioni Nazionali.* Firenze: Giunti.