Samuele Antonini
Professore Associato, Dipartimento di Matematica e Informatica “Ulisse Dini”, Università di Firenze

Conoscenza procedurale, formale e intuitiva in matematica

Codice Progetto: 10.2.7.A4-FSEPON-INDIRE-2021-1
CUP: B55F21003060006

Perché insegnare matematica?

Prima di iniziare a riflettere sull'insegnamento/apprendimento della matematica premetto una breve, ma a mio avviso fondamentale, considerazione sugli obiettivi generali dell'insegnamento di questa disciplina.
Il discorso sarebbe lungo e complesso ma un buon punto di partenza è quanto ci riportano le Indicazioni Nazionali per il primo ciclo:

> Le conoscenze matematiche contribuiscono alla formazione culturale delle persone e delle comunità […] In particolare, la matematica dà strumenti per la descrizione scientifica del mondo e per affrontare problemi utili nella vita quotidiana; contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri. (MIUR, 2012, p. 60)

Questa impostazione solleva diverse problematiche, prima fra tutte il significato di "conoscenza matematica". Sarà infatti in base alla sua visione di conoscenza matematica che l'insegnante definisce obiettivi didattici, sceglie metodologie per raggiungerli e valuta il lavoro, il proprio e quello degli studenti. Non intendiamo aprire in queste pagine discussioni a sfondo epistemologico particolarmente profonde ma è indubbio che persone diverse potrebbero avere posizioni diverse e vogliamo cercare un minimo di chiarezza. Cosa si intende con conoscenze matematiche? Si tratta di conoscere definizioni e teoremi? (e cosa significa "conoscere" un teorema? Saperlo dire? Dimostrare?). Eseguire procedure? (per esempio, sapere eseguire moltiplicazioni in colonna? Divisioni? Risolvere equazioni?). Costruire argomentazioni? Esplorare situazioni nuove? Risolvere problemi?
Vediamo nelle prossime pagine alcuni costrutti della didattica della matematica che ci permettono di delineare alcuni aspetti importanti.

Conoscenza concettuale e conoscenza procedurale

Una prima distinzione che ritroviamo nel lavoro di molti studiosi (per esempio Hiebert, 1985) riguarda la conoscenza di concetti e di procedure. In estrema sintesi, la conoscenza concettuale è relativa ai concetti e alle relazioni tra concetti, la conoscenza procedurale è la conoscenza di procedure e algoritmi. Facciamo un esempio e consideriamo un concetto elementare come quello di divisione tra numeri naturali. La conoscenza procedurale è la conoscenza di un algoritmo (o più di uno) che permette, a partire da due numeri naturali (di cui il divisore diverso da zero), di trovare quoziente e resto. La conoscenza concettuale riguarda il significato matematico della divisione, la relazione matematica tra dividendo, divisore, quoziente e resto, la relazione tra multipli e divisori. Ovviamente, ogni procedura trova la giustificazione della sua correttezza nella relazione tra concetti. Gli algoritmi della divisione si basano, per esempio, sulle proprietà delle operazioni tra numeri naturali. Dunque, conoscenza procedurale e conoscenza concettuale sono strettamente in relazione e distinguerle in questa sede ha uno scopo soprattutto relativo all'analisi cognitiva e didattica.
Per esempio, potrei aver compreso che la ripartizione equa di 257 oggetti tra 41 persone può essere modellizzata con una divisione, potrei attribuire un significato al quoziente e al resto e allo stesso tempo non essere in grado di determinare, con carta e penna, il numero di oggetti che avrà ogni persona e se e quanti oggetti rimangono. In questo caso potrei dire di aver costruito una conoscenza concettuale ma non procedurale della divisione. Viceversa (ed è una situazione ahimè molto frequente nella scuola), potrei conoscere una procedura e dunque essere in grado di determinare quoziente e resto della

divisione di 257 per 41 senza conoscere i legami tra questi numeri e senza collegare questa divisione al problema della ripartizione.

Facciamo un altro esempio. Alla scuola secondaria di primo grado si presta molta attenzione agli aspetti procedurali legati al concetto di minimo comune multiplo e massimo comun divisore. La conoscenza procedurale, in questo caso, è la conoscenza della procedura per determinare il minimo comune multiplo e il massimo comun divisore di due numeri. Algoritmo classico su cui si lavora molto è quello che consiste nel fattorizzare i due numeri e nello scegliere opportunamente gli esponenti dei fattori. Il lavoro su questo tipo di conoscenza, cui in genere si dedica molto tempo, non porta necessariamente lo studente a costruire concetti e collegamenti tra concetti, arrivando al paradosso, che in molti casi un soggetto sa calcolare il minimo comune multiplo di due numeri ma non ne ha compreso il senso.
Un esempio tipico è la ricerca affannosa del minimo comune multiplo dei denominatori di due frazioni svolto al fine di calcolarne la somma. Molti studenti conoscono la procedura senza essere in grado di modificarla, per esempio calcolando semplicemente il prodotto dei denominatori, dato che manca una conoscenza concettuale relativa ai numeri razionali e alle operazioni tra essi.
Il problema di una conoscenza procedurale non accompagnata da un'adeguata conoscenza concettuale, si ritrova a tutti i livelli scolari e investe anche studenti universitari e insegnanti. Giusto per riportare un esempio (in letteratura se ne trovano di tutti i tipi), cito uno studio che ha coinvolto studenti e docenti di matematica relativamente alla divisione tra numeri razionali, in cui gli autori osservano:

> Va anche detto che nessuno degli studenti da noi intervistati e quasi nessuno dei molti docenti di Matematica da noi intervistati ha saputo dare una spiegazione logica sensata o formale del fatto che, per eseguire la divisione fra due frazioni $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ ($b \neq 0$ e $d \neq 0$), si può effettuare la moltiplicazione $\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ ($c \neq 0$). Per tutti è una "regola", "si fa così", "basta fare così", ma nessuno sa spiegare un perché. Il che si traduce, dal punto di vista didattico, in una trattazione inaccettabile che prevede che in Matematica ci sono questioni che non si spiegano, che si devono eseguire in un certo modo, ma nessuno sa il perché. (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2021, p. 71)

Allo scopo di chiarire ulteriormente il punto in discussione, riporto di seguito alcuni episodi.

Episodio 1. Il primo episodio riguarda un dialogo tra chi scrive e una studentessa universitaria di scienze della formazione primaria. Il docente ha chiesto se esiste un numero che sia multiplo di 433 e di 1025. La studentessa inizia a fattorizzare i due numeri, spiegando che per vedere se esiste un multiplo di entrambi deve fattorizzare i numeri e calcolare il minimo comune multiplo. Il docente precisa che non è necessario determinare il numero ma dire soltanto se esiste ma la studentessa non mostra di comprendere le parole del docente. Nemmeno la richiesta di riflettere sul prodotto $433 \cdot 1025$ sblocca la situazione.

Commento. La studentessa conosce l'algoritmo per determinare il minimo comune multiplo di due numeri e si ostina a volerlo eseguire. Il discorso del docente è su un livello concettuale: non chiede di trovare un numero ma di dire se esiste, e questo dalla studentessa non viene colto. L'attenzione della studentessa è sulla procedura, quella del docente è sul concetto (di multiplo). C'è da chiedersi seriamente il valore della conoscenza procedurale della studentessa, costruita con tanta fatica (sua e dei suoi insegnanti)

Episodio 2. In un questionario sulle equazioni, uno studente di classe terza di scuola secondaria di primo grado riporta correttamente la soluzione dell'equazione $2 + x = -3$ mostrando anche tutti i passaggi che portano alla soluzione. Tuttavia, lo studente sostiene che l'equazione $x = 5$ NON ha soluzione! E in modo coerente, alla richiesta di portare un esempio di equazione senza soluzione scrive $x = 19$.

Commento. Lo studente mostra di conoscere la procedura per trovare la soluzione di equazioni di primo grado, applica una serie di operazioni in un certo ordine e arriva al "risultato" finale. Su tale risultato lo studente non ha un controllo concettuale. Paradossalmente sa trovare la soluzione di un'equazione senza sapere cosa sia…
La visione procedurale può anche spiegare i motivi che lo portano a ritenere che le equazioni $x = 5$ e $x = 19$ non abbiano soluzioni. Su queste, infatti, non è possibile operare, non ci sono numeri o lettere da portare da una parte o dall'altra del segno di uguale. Di fatto, le equazioni rischiano spesso di esser viste come esercizi da risolvere applicando una procedura e la soluzione sembra essere solo il prodotto di tale procedura.

Tornando al discorso generale, la posizione dei ricercatori in didattica della matematica è che sia necessario un equilibrio nell'insegnamento/apprendimento tra conoscenza procedurale e conoscenza concettuale. Al contrario, è molto comune nella scuola uno sbilanciamento verso gli aspetti procedurali, con conseguente attenzione a "regole" da seguire e rispettare. Tale attenzione è ben visibile dalle paginate e paginate di esercizi dei libri di testo, spesso molto simili tra loro, dall'attenzione ai prodotti (i risultati) più che ai processi (di ragionamento) e dunque a una demonizzazione dell'errore, dall'accumulo di procedure con scarsa attenzione al loro senso.
Gli effetti di questo sbilanciamento sono molteplici. Si priva lo studente della possibilità di attivare e sviluppare processi cognitivi e metacognitivi fondamentali del pensiero matematico e necessari per raggiungere i traguardi educativi previsti, per esempio, relativamente allo sviluppo di competenze argomentative. Si incentiva una memorizzazione cieca di un numero enorme di informazioni che non potrà più, a un certo punto, essere memorizzato. Si promuove un rapporto malato con l'errore, come qualcosa da evitare e che sarà valutato negativamente. Come ha ampiamente dimostrato la ricerca (si veda per esempio Zan, 2007), si promuove in questo modo una visione distorta della matematica che diventa uno dei principali ostacoli all'apprendimento della matematica, e purtroppo si trascina per tutta la carriera scolastica a meno di rare eccezioni. Questa visione mal si concilia con quegli obiettivi delle Indicazioni Nazionali che abbiamo riportato all'inizio di questo scritto e di fatto, le Indicazioni Nazionali sottolineano in modo esplicito e forte l'importanza dello sviluppo di una adeguata visione della matematica:

> Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola […]
> Di estrema importanza è lo sviluppo di un'adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare (MIUR 2012, p. 60).

Prima di chiudere il paragrafo, una breve considerazione sull'abuso della parola "regola", parola che non appartiene al linguaggio della matematica, eppure è particolarmente diffusa nella scuola e utilizzata da alunni e insegnanti quando si parla di matematica. Scrive Zan (2015):

> la parola 'regola' non appartiene al linguaggio della matematica, dove trovano posto piuttosto parole come teorema, definizione, convenzione, dimostrazione. Eppure, è una parola che nel sentire comune è spesso associata a questa disciplina. La matematica da molti viene vista infatti come un insieme di regole da ricordare e da applicare" (Zan, 2015, p. 47).

La frase "perché è una regola" appiattisce interi universi di "perché" della matematica (si veda Antonini 2021), toglie (svilendola) la necessità di argomentare e pone argomentazioni e dimostrazioni in un mondo estraneo agli studenti, impedendo alla matematica di essere quella disciplina che "contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri" (MIUR, 2012, p. 60).

Definizione e immagine concettuale

Focalizziamoci ora sugli aspetti concettuali. Volendo riflettere sui concetti matematici dobbiamo ovviamente tener conto della definizione matematica[1], ovvero della rappresentazione linguistica che acquisisce senso in una specifica teoria matematica. Così possiamo trovare la definizione di numero pari come numero naturale divisibile per 2, la definizione di divisibilità, di funzione, di funzione continua, di soluzione di un'equazione, di quadrato, eccetera.

Volendo fare un'analisi cognitiva e didattica, parlare di concetti matematici in termini di definizioni non è sufficiente. Abbiamo bisogno di considerare la controparte cognitiva dei concetti (immagini mentali, prototipi, ecc.). Un passo importante in didattica della matematica su queste tematiche è stato fatto nella distinzione di Tall e Vinner (Vinner, 1991) fra la definizione di un oggetto matematico (*concept definition*) e la struttura cognitiva che un soggetto associa al concetto (*concept image*) e che può comprendere la definizione, ma anche varie rappresentazioni, grafici, esempi, legami con altri concetti, emozioni e sensazioni legate all'esperienza pregressa. L'*immagine del concetto* è soggettiva (dipende dal soggetto) e inoltre può cambiare nel tempo. Così l'immagine di funzione continua di due studenti di liceo può essere molto diversa, e può subire variazioni nel tempo acquisendo nuove conoscenze.

Per un apprendimento significativo è necessario costruire sia la definizione (e dunque l'aspetto più relativo a una conoscenza formale) sia una immagine del concetto che sia coerente con la definizione. Senza definizione non stiamo facendo matematica, perché stiamo tralasciando tutto l'aspetto teorico che è al cuore della matematica stessa e senza il quale non hanno senso dimostrazioni e teoremi. Senza la *concept image*, la conoscenza formale resterebbe sterile e poco significativa, e non riusciremmo a risolvere problemi a parte esercizi ripetitivi.

Come già detto, l'immagine del concetto è soggettiva e può essere molto dinamica e in continua evoluzione nel tempo: l'esperienza e le manipolazioni possono contribuire a modificarla, e nel migliore dei casi, a svilupparla e completarla. Tuttavia, può succedere che l'immagine non venga costruita. In questo caso, anche se un soggetto ricorda la definizione, non ha costruito una conoscenza significativa e difficilmente riuscirà a utilizzare il concetto in situazioni diverse da quelle di esercizi ripetitivi in cui applica regole memorizzate.

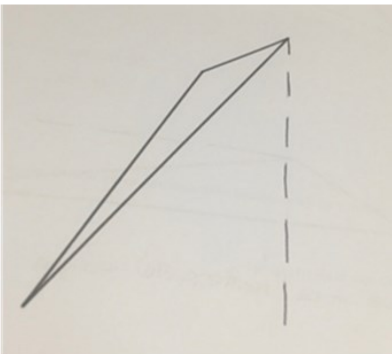
Gli studi mostrano anche che può succedere che l'immagine del concetto non sia coerente con la definizione e addirittura che diversi aspetti della immagine del concetto possono non essere coerenti tra loro. Questo spiega diverse difficoltà, errori e misconcezioni degli studenti e permette di individuare alcuni nodi cognitivamente problematici.

---

[1] I concetti primitivi non hanno una definizione esplicita e risultano definiti implicitamente dagli assiomi della teoria. Questa distinzione esula comunque dagli scopi di questo scritto.

Nei loro lavori, Vinner e Tall riportano diversi esempi di risposte di studenti a problemi riguardanti il riconoscimento di funzioni. Molti studenti che riportavano la definizione corretta di funzione richiedevano che le funzioni fossero rappresentate da precise relazioni algebriche, che i grafici fossero sufficientemente regolari, insomma tutta una serie di vincoli che non erano stati menzionati nella definizione da loro stessi proposta. In questi casi, la conoscenza della definizione non ha determinato la costruzione di una *concept image* compatibile con la definizione. Molto probabilmente, l'uso prolungato, negli esercizi, di funzioni esprimibili attraverso "formule" ha contribuito alla formazione di un'idea di funzione che deve possedere altre proprietà che vanno oltre a quelle espresse nella definizione. Un altro esempio interessante, alla scuola di secondo grado, è il concetto di limite. L'immagine comprende grafici, esempi di limiti di funzioni e di successioni, limiti notevoli, procedure di calcolo, metafore… La stessa parola "limite" può contribuire a formare un'immagine distorta del concetto matematico, in quanto nel linguaggio quotidiano è usata spesso con un'accezione diversa, per esempio per riferirsi a ciò che non può essere superato o non può essere raggiunto. Questa immagine di limite è molto diffusa tra gli studenti che a volte faticano a considerare funzioni che assumono il valore del limite infinite volte. Vediamo ora altri esempi. Preciso che si tratta di esempi volti a mostrare come la distinzione tra definizione e immagine del concetto sia utile come strumento interpretativo e non per mettere in evidenza errori che non è detto siano più significativi di altri:

1. Nelle figure 1 e 2 è possibile osservare alcuni segmenti tracciati da due studenti cui era stato richiesto, in un questionario anonimo, di disegnare le altezze di alcuni triangoli. Gli studenti, uno di secondaria di primo grado e uno di quarta liceo scientifico, avevano riportato correttamente la definizione di altezza. Appare evidente come in questo caso, peraltro molto comune, l'aspetto figurale (con la centralità dell'orizzontale e verticale) più che la definizione, entra in gioco pesantemente nei processi di pensiero.



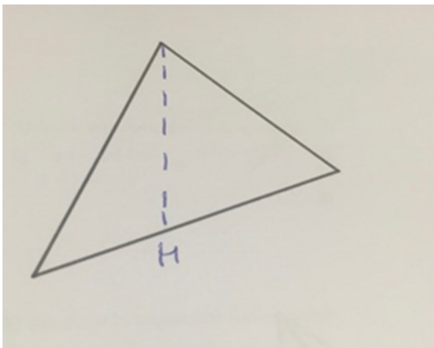


Figura 1: Altezze di triangoli secondo uno studente di classe III di una scuola secondaria di I grado

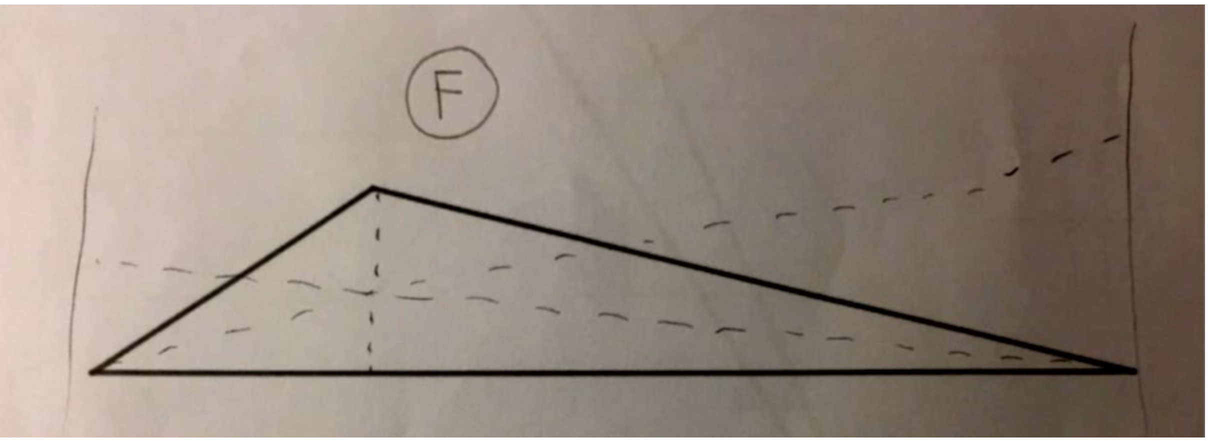


Figura 2: Altezze di un triangolo secondo uno studente di classe IV di un liceo scientifico

2. Il numero 0 è pari? È questa una domanda che mette in difficoltà numerosi studenti, a tutti i livelli scolari, anche all'università. Risposte tipiche sono che lo zero non è né pari né dispari, oppure sia pari sia dispari… Dal punto di vista matematico il problema è presto risolto. Dobbiamo considerare la definizione di numero pari e vedere se 0 soddisfa tale definizione. Dato che un numero pari è un numero divisibile per 2 e che 0 è divisibile per 2, si conclude che 0 è un numero pari. Ma lo strumento essenziale, la definizione di numero pari, potrebbe non aiutare. Spesso non c'è nemmeno l'intenzione di ricorrere alla definizione. Nel ragionamento entra soprattutto l'immagine del numero zero (come vuoto, assenza, o comunque numero molto particolare), con tutte le problematiche cognitive ed epistemologiche che si porta dietro.

Come mostra il secondo esempio, non dobbiamo pensare che con *concept image* si faccia riferimento soltanto a immagini nel senso di figure. L'immagine dello 0, che coinvolge il vuoto e l'assenza, entrano nella *concept image* e in qualche caso condizionano pesantemente i ragionamenti che lo coinvolgono. In sintesi, nella risoluzione di problemi ed esercizi, gli studenti non necessariamente fanno riferimento alle definizioni, anche se le conoscono. Ovviamente, la conoscenza della definizione di un concetto non garantisce la sua comprensione; erroneamente uno studente potrebbe credere che "aver capito" un concetto significhi possederne una definizione (ed erroneamente un insegnante potrebbe credere di «aver insegnato» nel momento in cui i suoi studenti conoscono la definizione). Inoltre, se immagine e definizione risultano non coerenti, o se diverse parti dell'immagine non sono tra loro coerenti, il processo di pensiero di uno studente potrebbe mostrare conflitti e contraddizioni, anche senza che il soggetto ne sia consapevole.

La conoscenza intuitiva

Uno degli aspetti specifici della conoscenza matematica è il fatto che gli oggetti matematici non sono percepibili ai sensi. La conoscenza di questi oggetti non è, dunque, immediata, piuttosto è mediata, nel senso che vi si accede con un mezzo: il pensiero. Ma anche il pensiero ha bisogno di punti di riferimento affidabili, evidenti e immediati (come il comportamento pratico, reale, concreto in cui abbiamo certezze relative ad oggetti reali e ad operazioni su di essi).
Scrive Fischbein:

> *Gli "oggetti" mentali (concetti, operazioni, enunciati) devono avere un tipo di consistenza ed evidenza diretta simile a quella degli oggetti e degli eventi reali, esterni e materiali, se il processo di ragionamento deve essere un'attività genuina e produttiva*.
> Un'intuizione è, allora, un'idea che possiede due proprietà fondamentali della realtà concreta e oggettiva; l'immediatezza – cioè l'*evidenza* intrinseca – e la *certezza* (immanente, pratica e significativa) (Fischbein, 1987, p. 21, corsivo originale, traduzione dell'autore)

Fischbein si è occupato di conoscenza intuitiva e conoscenza formale sostenendo che la conoscenza intuitiva è quella conoscenza che ha il ruolo di conferire a uno sforzo intellettuale le proprietà che garantiscono la produttività e l'efficienza di un comportamento pratico. La conoscenza intuitiva possiede infatti le caratteristiche della conoscenza di oggetti reali e materiali (evidenza diretta, immediatezza, certezza, …) e della manipolabilità degli oggetti reali.
Per costruire conoscenza intuitiva, la didattica trasmissiva, con le lezioni frontali di un docente che espone, trasmette, spiega agli studenti, non è efficace:

> Una intuizione non può esser costruita tramite semplici esplorazioni verbali né attraverso procedure messe in pratica ciecamente […] Per creare nuove intuizioni […] chi apprende deve essere attivamente coinvolto… (Fischbein, 1982, p. 12, traduzione dell'autore)

E questo è perfettamente in linea con quanto richiesto dalla normativa, che sostiene la centralità del ruolo attivo dello studente nei processi di apprendimento:

> In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive (MIUR, 2012, p. 60)

Giocare con gli oggetti matematici

C'è ampio consenso tra gli studiosi sul fatto che l'acquisizione dei concetti è fortemente legata alle azioni *sugli* oggetti. Queste appare vero anche nel caso di oggetti astratti come gli oggetti matematici, con i quali possiamo giocare, aggeggiare, e che possiamo manipolare e trasformare fino a capirne il funzionamento.
A questo proposito osserviamo che, come ha messo in luce la ricerca in didattica della matematica (Dahlberg e Housman, 1997) gli studenti che *costruiscono i propri esempi* utilizzano poi i concetti appresi in modo adeguato. Watson e Mason (2005), nel sostenere l'importanza della costruzione di esempi di concetti, descrivono lo *spazio di esempi* come l'insieme di esempi che un individuo ha a disposizione in un certo momento di fronte a un dato compito. Uno degli obiettivi dell'insegnamento dovrebbe essere quello di fare in modo che gli studenti costruiscano ed estendano i propri spazi di esempi, in modo che acquisiscano familiarità con concetti e relazioni.
Questa impostazione può stare alla base di attività didattiche che hanno lo scopo di costruire un equilibrio tra conoscenza concettuale e procedurale e un dialogo tra conoscenza formale e conoscenza

intuitiva. Riporto soltanto alcuni esempi, e chiedo al lettore/alla lettrice di focalizzarsi non tanto sulle attività didattiche quanto sulle idee che le costituiscono.
Per esempio, se stiamo trattando le funzioni derivabili possiamo pensare di costruire e ampliare lo spazio degli esempi promuovendo processi di costruzione di funzioni derivabili e non derivabili, continue e non continue: funzioni continue e non derivabili in un punto (non solo la classica funzione f(x)=|x|), in due punti, in tre, in infiniti punti, eccetera. Funzioni limitate, non limitate, limitate in un intervallo aperto ma senza massimi e minimi; non limitate ma senza limite all'infinito, e così via.
L'esplorazione di questi mondi di funzioni (e dei vari modi in cui si possono rappresentare) può contribuire a formare una certa familiarità con le funzioni e a dare senso alle loro proprietà e ai teoremi che si vanno a studiare, costruendo uno spazio di esempi in cui ritrovare immediatamente esempi e controesempi e comprendendo più profondamente le relazioni tra ipotesi e tesi (si veda Antonini 2019).
Come altro esempio, torniamo alle altezze dei triangoli. L'esperienza con i triangoli in effetti è spesso limitata a triangoli disegnati con base orizzontale e altezza verticale e questo spiega molte difficoltà (si veda sopra, figure 1 e 2). Si dovrà aver cura di estendere lo spazio di esempi andando a considerare triangoli nelle posizioni più diverse, in modo che l'altezza non sia sempre verticale e in modo che lo studente manipoli triangoli diversi e in posizione diversa e acquisisca familiarità con essi con la consapevolezza che in alcuni casi è più problematico che in altri tracciare l'altezza. Per esempio, il gioco proposto dalla ricercatrice Carlotta Soldano dell'Università di Torino permette proprio di fare esperienze di questo tipo. Si tratta di un gioco a due in ambiente di geometria dinamica in cui un giocatore deve tracciare l'altezza di un triangolo e l'altro giocatore cerca di metterlo in difficoltà scegliendo di costruire un triangolo in una opportuna posizione (si veda https://www.geogebra.org/m/rnmqcvm3; si suggerisce al lettore/alla lettrice di giocare per meglio comprendere cosa intendiamo). Il gioco si inquadra a pieno titolo nella costruzione di esempi volta a promuovere familiarità con oggetti matematici e a formare una conoscenza intuitiva dei concetti in gioco (e dunque una armonia tra *concept image* e definizione). Il lavoro del primo giocatore (che cerca di costruire triangoli per cui è difficile tracciare l'altezza) promuove peraltro la consapevolezza delle difficoltà di individuare le altezze di certi triangoli e la conoscenza dei motivi di tali difficoltà (si veda Soldano, 2019).
Come ultimo esempio, pensiamo al momento in cui in una scuola secondaria di primo grado abbiamo l'obiettivo di introdurre i concetti di multiplo, divisibilità, minimo comune multiplo e massimo comun divisore. Abbiamo già discusso dei pericoli di concentrarci prevalentemente sulle procedure di calcolo e sulle problematiche connesse a trascurare l'acquisizione di familiarità con tali concetti. Già il fatto di far costruire agli studenti le successioni dei multipli di diversi numeri (magari ognuna in una striscia di carta), e farle esplorare alla ricerca di regolarità va nella direzione della costruzione di una conoscenza intuitiva che poi si può integrare con la conoscenza formale. La chiave per la costruzione di consegne sarà di porre domande aperte e di lasciare il tempo e la libertà di esplorare. Quali sono le successioni di multipli contenute nella successione dei multipli di 6? E quali sono quelle che contengono la successione dei multipli di 12? Quali sono i numeri che compaiono in due successioni di multipli? In quali successioni di multipli compare il numero 15? Perché? Come dovrebbe apparire evidente, le possibilità sono numerose.
In ogni ambito della matematica che si insegna a scuola possiamo e dovremmo promuovere conoscenza intuitiva attraverso la costruzione della familiarità con gli oggetti matematici, tenendo conto che questa familiarità non passa necessariamente dalla esecuzione di procedure (come negli esempi visti in queste pagine).

Un approccio di questo tipo ribalta la triste realtà delle *regole* e apre il mondo della *libertà*[2]: la libertà di esplorare, di fare tentativi e numerosi errori, di giocare con gli oggetti matematici come il bambino gioca con un giocattolo e lo rompe, magari per capire come è fatto…
La transizione alla libertà di pensare non è però un passaggio semplice né immediato, né per lo studente, né per l'insegnante. Richiede una "cultura di classe" in cui non ha posto la risposta "perché è una regola" e in cui si costruisce l'abitudine mentale della ricerca dei "perché" e dell'esplorazione. Dove, con *abitudine* si intende consuetudine, inclinazione, disposizione: un atteggiamento nei confronti della matematica e della pratica matematica.

Bibliografia

Antonini, S. (2019). Congetturare e argomentare tra esempi e controesempi. In F. Morselli, G. Rosolini, C. Toffalori (a cura di), *Educare alla razionalità. Tra logica e didattica della matematica*, (pp. 417-440). Unione Matematica Italiana: Bologna.

Antonini, S. (2021). La matematica e la cultura dei perché. In B. D'Amore (ed.), *La didattica della matematica: riflessioni teoriche e proposte concrete*, 3-6. Pitagora Editrice Bologna.

Dahlberg, R.P. & Housman, D.L. (1997). Facilitating learning events through example generation. Educational Studies in Mathematics, vol. 33, pp. 283-299.

D'Amore, B., & Pinilla, M. I. F. (2021). La ricerca in Didattica della Matematica: Una responsabilità dei matematici. *La matematica e la sua didattica*, 29(1), 39-80.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of mathematics*, 3(2), 9–24.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Hiebert, J. (1985) *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

MIUR (2012). Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione. *Annali della Pubblica Istruzione*, Numero Speciale. Firenze: Le Monnier.

Soldano, C. (2019). Apprendere con la logica dell'indagine: attività di giocoindagine all'interno di ambienti di geometria dinamica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 42(3), 237-259.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics, in D. Tall (ed.), Advanced Mathematical Thinking, 65–81, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands.

Watson, A. & Mason, J. (2005). Mathematics as a constructive activity: learners generating examples. Mahwah, NJ, USA: Erlbaum.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica: osservare, interpretare, intervenire*. Milano: Springer.

Zan, R. (2015). Dalle regole ai perché. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), Atti del Convegno Nazionale "Incontri con la matematica" nr. 29: *La didattica della matematica, disciplina per l'apprendimento, 6-7-8 Novembre 2015, Castel San Pietro Terme (BO)* (pp. 47-52). Bologna: Pitagora.

[2] Georg Cantor, nei Grundlagen del 1883, scriveva che «l'essenza della matematica sta proprio nella sua libertà».